

ძვირფასო სტუდენტებო,  
 დავალების შესრულების დაწყებამდე,  
 გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

**დავალება № 18. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები.  
 ფინანსური მათემატიკის ელემენტები.**

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 18-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

3- ა,დ,თ,ი,ლ	3- ბ,ე,კ,ნ	4	5	6	8	10	11	12	14	15	17
18	19	20	21	23	24	25	26	27	28	29	30

**ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა**

**3-ა,დ,თ,ი,ლ.** გააწარმოეთ მოცემული ფუნქციები:

ა)  $f(x) = e^{x^2+2x-1}$ ;

დ)  $f(x) = (1 - 3e^x)^2$ ;

თ)  $f(x) = \ln x^3$ ;

ი)  $f(x) = \ln 2x$ ;

ლ)  $f(x) = x \ln \sqrt{x}$ .

**ამოხსნა:** გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი, მივიღებთ:

ა)  $f'(x) = e^{x^2+2x-1} \cdot (x^2 + 2x - 1)' = e^{x^2+2x-1} \cdot (2x + 2)$ ;

დ)  $f'(x) = 2(1 - 3e^x) \cdot (1 - 3e^x)' = 2(1 - 3e^x)(-3e^x) = -6e^x(1 - 3e^x)$ ;

თ)  $f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$ ;

ი)  $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ ;

ლ) გამოვიყენოთ ჯერ ფუნქციების ნამრავლის, ხოლო შემდეგ კი რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი, მივიღებთ:  $f'(x) = x' \cdot \ln \sqrt{x} + x \cdot (\ln \sqrt{x})' = \ln \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1+\ln x}{2}$ .

**4.** მენეჯერის შეფასებით, თუ მის ფირმაში დასაქმებული იქნება  $x$  ათასი ადამიანი, მაშინ ფირმის მოგება (მილიონ ლარებში) გამოისახება შემდეგი  $P(x)$  ფუნქციის საშუალებით:

$$P(x) = \ln(4x + 1) + 3x - x^2.$$

დასაქმებულთა რა რაოდენობა უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და რისი ტოლია ის?

**ამოხსნა:**  $P(x)$  ფუნქციის წარმოებული გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ:  $\frac{4}{4x+1} + 3 - 2x = 0$ , საიდანაც  $P(x)$ -ის განსაზღვრის არის გათვალისწინებით, გვექნება:  $x = \frac{7}{4}$ . ადვილი შესამოწმებელია, რომ  $P'(x) > 0$ , როდესაც  $x < \frac{7}{4}$  და  $P'(x) < 0$ , როდესაც  $x > \frac{7}{4}$  რაც იმას ნიშნავს, რომ  $x = \frac{7}{4}$  არის  $P(x)$ -ის მაქსიმუმის წერტილი. ე.ი. მაქსიმალური მოგება მიიღწევა თუ ფირმაში დასაქმებული იქნება  $\frac{7}{4} \cdot 1000 = 1750$  ადამიანი და შესაბამისად ფირმის მაქსიმალური მოგება იქნება:  $P\left(\frac{7}{4}\right) = 3 \cdot \frac{7}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \ln\left(4 \cdot \frac{7}{4} + 1\right) \approx 4,27$  მილიონი ლარი.

**პასუხი:** მაქსიმალური მოგება მიიღწევა თუ ფირმაში დასაქმებული იქნება 1750 ადამიანი; ფირმის მაქსიმალური მოგება  $\approx 4,27$  მილიონი ლარი.

5. ფირმამ წლიური გაყიდვების მოცულობა წინა წელთან შედარებით გაზარდა 50000-დან 55000-მდე. გამოსახეთ ეს ზრდა პროცენტობით.

**ამოხსნა:** ცხადია ზრდა იქნება  $\frac{55000-50000}{50000} \cdot 100\% = 10\%$ .

**პასუხი:** 10%.

11. ავტომანქანის ფასი წლის განმავლობაში შემცირდა ორჯერ: პირველად 5%-ით, ხოლო შემდეგ 9%-ით. საბოლოოდ რამდენი პროცენტით შემცირდა ავტომანქანის ფასი?

**ამოხსნა:** ავტომანქანის თავდაპირველი ფასი აღვნიშნოთ  $x$ -ით. მაშინ პირველი გაიაფების შემდეგ მისი ფასი იქნებოდა  $\frac{95}{100}x$ , ხოლო მეორედ გაიაფების შემდეგ მისი ფასი იქნება  $\frac{95}{100}x \cdot \frac{91}{100}$ . ე.ი. საბოლოოდ თავდაპირველთან შედარებით ავტომანქანის ფასი შემცირდა  $\left(1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{91}{100}\right) \cdot 100\% = 13,55\%$  -ით.

**პასუხი:** 13,55% -ით.

14. 12000 ლარი დაბანდება 6 წლით წლიური რთული 7%-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა.

**ამოხსნა:** თუ ვისარგებლებთ დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულით სარგებლის წლიური რთული განაკვეთის შემთხვევაში, მივიღებთ რომ 6 წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა იქნება:

$$A_6 = 12000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^6 \approx 18008,76 \text{ ლარი.}$$

**პასუხი:**  $\approx 18008,76$  ლარი.

17. რა რაოდენობის კრედიტი აიღო მოვალემ, თუ კრედიტი გაცემული იყო 15 წლით სარგებლის მარტივი წლიური 8%-იანი განაკვეთით და ვადის გასვლის შემდეგ მან დააბრუნა 83000 ლარი?

**ამოხსნა:** დისკონტირების ფორმულიდან მივიღებთ, რომ აღებული კრედიტის მოცულობა არის

$$S = \frac{S_{15}}{1 + 15 \cdot \frac{8}{100}} = \frac{83000}{1 + 1,2} \approx 37727,27 \text{ ლარი.}$$

**პასუხი:**  $\approx 37727,27$  ლარი.

20. 25000 ლარი დაბანდება სესხად სარგებლის წლიური რთული 12%-იანი განაკვეთით. რამდენი წლის შემდეგ გახდება ეს თანხა 250000 ლარის ტოლი?

**ამოხსნა:** ვთქვათ თანხა 250000 ლარის ტოლი გახდება  $x$  წლის შემდეგ. მაშინ გვექნება:

$$250000 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right)^x \Rightarrow \left(1 + \frac{12}{100}\right)^x = 10 \Rightarrow x = \log_{1,12} 10 \approx 20,3.$$

**პასუხი:**  $\approx 20,3$  წლის შემდეგ.

23. 14000 ლარი დაბანდება 3 წლით სარგებლის წლიური რთული ნომინალური 12%-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა თუ დარიცხვა ხდება:

ა) ყოველ ნახევარ წელიწადში ერთხელ;

ბ) ყოველ კვარტალში ერთხელ;

გ) ყოველთვიურად.

**ამოხსნა:** სარგებლის წლიური რთული ნომინალური განაკვეთის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$ა) B(3) = 14000 \cdot \left(1 + \frac{12}{2 \cdot 100}\right)^{2 \cdot 3} \approx 19859,27 \text{ ლარი};$$

$$ბ) B(3) = 14000 \cdot \left(1 + \frac{12}{4 \cdot 100}\right)^{4 \cdot 3} \approx 19960,65 \text{ ლარი};$$

$$გ) B(3) = 14000 \cdot \left(1 + \frac{12}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot 3} \approx 20030,76 \text{ ლარი}.$$

**25.** რა დრო დასჭირდება დაბანდებული 5000 ლარის 7000 ლარამდე გაზრდას, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთი შეადგენს 6%-ს და დარიცხვა ხდება:

ა) კვარტალურად;

ბ) უწყვეტად.

**ამოხსნა:** ვთქვათ დაბანდებული 5000 ლარის 7000 ლარამდე გაზრდას სჭირდება  $t$  წელი, მაშინ:

$$ა) \text{ კვარტალური დარიცხვის შემთხვევაში გვექნება: } 7000 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{4 \cdot 100}\right)^{4t} \Rightarrow \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4t} = 1,4 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\log_{1,015} 1,4}{4} \approx 5,66.$$

$$ბ) \text{ უწყვეტად დარიცხვის შემთხვევაში გვექნება: } 7000 = 5000 \cdot e^{\frac{6t}{100}} \Rightarrow e^{\frac{6t}{100}} = 1,4 \Rightarrow t = \frac{100}{6} \cdot$$

$$\ln 1,4 \approx 5,61.$$

**პასუხი:** ა)  $\approx 5,66$  წელი; ბ)  $\approx 5,61$  წელი.

**26.** ერთი ბანკი სთავაზობს კლიენტებს ერთი წლის განმავლობაში ანაზრებზე სარგებლის ყოველთვიურ რთულ 3%-იან დარიცხვას, ხოლო მეორე ბანკი სარგებლის მარტივ ყოველთვიურ 3,1%-იან დარიცხვას. რომელ ბანკში უფრო ხელსაყრელია თანხის შეტანა?

**ამოხსნა:** ვთქვათ მენაზრე აპირებს  $x$  ლარის შეტანას. ცხადია, რომ ჩვენს შემთხვევაში დარიცხვის პერიოდი  $n = 12$ .

$$\text{რთული პროცენტის შემთხვევაში მივიღებთ: } A_{12} = x \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{12} \approx 1,426x$$

$$\text{ხოლო მარტივი პროცენტის შემთხვევაში მივიღებთ: } S_{12} = x \cdot \left(1 + \frac{3,1 \cdot 12}{100}\right) = 1,372x.$$

როგორც ვხედავთ  $A_{12} > S_{12}$ . მაშასადამე მენაზრისთვის უფრო ხელსაყრელია პირველ ბანკში თანხის შეტანა.

**პასუხი:** პირველში.

**27.** იპოვეთ ყოველკვარტალური დარიცხვისას წლიური რთული ნომინალური 12%-იანი განაკვეთის შესაბამისი ეფექტური განაკვეთი.

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით,  $k$  ჯერადი დარიცხვისას რთული ნომინალური  $r$ %-იანი განაკვეთის შესაბამისი ეფექტური განაკვეთი გამოითვლება ფორმულით:  $r_{\text{ეფ}} = 100 \left( \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^k - 1 \right)$ . ჩვენს შემთხვევაში

$$r = 12 \quad \text{და} \quad k = 4. \quad \text{ამიტომ გვექნება: } r_{\text{ეფ}} = 100 \left( \left(1 + \frac{12}{100 \cdot 4}\right)^4 - 1 \right) = 100 \left( (1 + 0,03)^4 - 1 \right) = 100 \left( (1,03)^4 - 1 \right) =$$
$$= 100 \left( (1,03)^4 - 1 \right) \approx 100(1,13 - 1) = 100 \cdot 0,13 = 13$$

**პასუხი.** ეფექტური განაკვეთია  $\approx 13\%$ .